

- المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات

Date : / /

Subject : المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية  
والخطية غير المتجانسة

٢- لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

ونفرض أن  $y = uv$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

نقوم بوضع المعادلة التفاضلية (١) فنجد أن

$$u''v + (2u'v' + p(x)u')v + (u'' + p(x)u' + q(x)u)v = f(x)$$

إذا فرضنا  $2u' + p(x)u = 0$  عندها

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{2}p(x)$$

$$\ln u = -\frac{1}{2} \int p(x) dx$$

$$u = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$$

$$y = \int f(x)u dx$$

أي أن

إذا فرضنا أن

$$Q_1(x) = u'' + p(x)u' + q(x)u$$

عندها ومنه كذا

$$u' = -\frac{1}{2}p(x)u$$

$$u'' = -\frac{1}{2}p'(x)u - \frac{1}{2}p(x)u'$$

$$u'' = -\frac{1}{2}p'(x)u + \frac{1}{4}p^2(x)u$$

أي أن

أي أن

$$Q_1(x) = Q_2(x)u + \frac{1}{4}p^2(x)u - \frac{1}{2}p'(x)u - \frac{1}{2}p^2(x)u$$

$$Q_1(x) = Q_2(x)u - \frac{1}{4}p^2(x)u - \frac{1}{2}p'(x)u$$

المعادلة  $x$  تأخذ الشكل التالي

$$uv'' + (Q_2(x)u - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x))u v = f(x)$$

ومنه فإن المعادلة السابقة تأخذ الشكل

$$v'' + (Q_2(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x))v = f(x) \int \frac{1}{u} dx$$

إذا كان

$$Q_2(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) = k$$

ك ثابت عددي تأخذ المعادلة السابقة الشكل

$$v'' + k.v = f(x) \int \frac{1}{u} dx$$



المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة

Date

والتي تتركز إلى معادلتين تفاضليتين ذات معاملات ثابتة

Subject: المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية  
والمتغيرة

(1)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

لكننا لدينا المعادلة التفاضلية

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

نقوم بدمج المعادلة التفاضلية (1) فنحصل أن:

$$u''v + (2u'v' + p(x)u')v + (u'' + p(x)u' + q(x)u)v = f(x)$$

إذا فرضنا أن:  $2u' + p(x)u = 0$  عندها:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{2}p(x)$$

$$\ln u = -\frac{1}{2} \int p(x) dx$$

$$u = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} v$$

أي أن:

$$Q_1(x) = u'' + p(x)u' + q(x)u$$

إذا فرضنا أن:

عندها: ومنه كذا:

$$u' = -\frac{1}{2}p(x)u$$

$$u'' = -\frac{1}{2}p'(x)u - \frac{1}{2}p(x)u'$$

$$u'' = -\frac{1}{2}p'(x)u + \frac{1}{4}p^2(x)u$$

أي أن:

أي أن:

$$Q_1(x) = Q_2(x)u + \frac{1}{4}p^2(x)u - \frac{1}{2}p'(x)u - \frac{1}{2}p^2(x)u$$

$$Q_1(x) = Q_2(x)u - \frac{1}{4}p^2(x)u - \frac{1}{2}p'(x)u$$

المعادلة x تأخذ الشكل التالي:

$$uv'' + (Q_2(x)u - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x))uv = f(x)$$

ومنه فإن المعادلة السابقة تأخذ الشكل:

$$v'' + (Q_2(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x))v = f(x) \cdot e^{\frac{1}{2} \int p(x) dx}$$

- إذا كان:

$$Q_2(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) = k$$

k ثابت عددي تأخذ المعادلة السابقة الشكل:

$$v'' + k \cdot v = f(x) \cdot e^{\frac{1}{2} \int p(x) dx}$$



وصية معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة .

$$ay'' + b y' + c y = \frac{k}{x^2} \quad \text{أما إذا كان}$$

حيث  $k$  ثابت عددي .

فإن المعادلة ترد إلى الشكل :

$$y'' + \frac{k}{x^2} y = f(x) \quad \frac{1}{x^2} \int p(x) dx$$

$$x^2 y'' + k y = x^2 f(x) \quad \frac{1}{x^2} \int p(x) dx$$

وهي معادلة أدر من الرتبة الثانية كما حسبنا في المراجعة

السابقة ....

الحالة الثانية : الخطية :

الحالة الخطية :

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = F(x) \quad \text{لكنه ليس المعادلة التفاضلية :}$$

$$w = p(x) \quad \text{لنضعها آن :}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dw} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} \right) = \frac{d}{dw} \left( \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} \right) \frac{dw}{dx}$$

$$y'' = \left( \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} \frac{dw}{dx} + \frac{dy}{dw} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{dw}{dx}$$

$$y'' = \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial w}$$

بالتعويض في المعادلة : (\*) نجد أن :

$$\left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial y}{\partial w} + p(x) \frac{dw}{dx} \frac{dy}{dw} + q(x) y = F(x)$$

منه فإن :



$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{(\frac{dw}{dx})^2} + p(w) \frac{dw}{dx} \frac{dy}{dw} + \frac{Q(w)}{(\frac{dw}{dx})^2} y = \frac{F(w)}{(\frac{dw}{dx})^2}$$

إذا كان:

$$\frac{Q(w)}{(\frac{dw}{dx})^2} = \pm 1 \Rightarrow \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = \pm Q(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dx} = \sqrt{\pm Q(x)} \Rightarrow$$

$$w = \int \sqrt{\pm Q(x)} dx.$$

وذلك لأن نأخذ الأسماء التي قبلها علامة الجذر مقبولة.

وإذا كان:

$$\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{(\frac{dw}{dx})^2} + p(x) \frac{dw}{dx} = k$$

k ثابت عددي.

عندئذ نأخذ المعادلة تكون إلى:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + k \frac{dy}{dw} \pm y = \pm \frac{F(w)}{Q(w)}$$

\*\*

\*\*

\*\*

- أمثلة:

$$y'' + 4xy' + 4x^2y = x \cdot e^{-x^2}$$

أوجد الحل العام للمعادلة:

بعد تحويل المعادلة المعطاة إلى معادلة تفاضلية فرعية ذات معاملات ثابتة

$$p(x) = 4x \quad Q(x) = 4x^2$$

$$Q(x) = \frac{1}{4} p'(x) - \frac{1}{2} p(x) = 4x^2 - \frac{1}{4} 16x^2 - \frac{1}{2} = -2 = k$$

$$|k| = -2$$

$$y = e^{-\frac{1}{4} \int p(x) dx} \cdot v(x)$$

أي أن:

$$y = e^{-\frac{4}{2} x^2} v(x) = e^{-x^2} v(x)$$

$$k y = F(x) e^{\frac{1}{4} \int p(x) dx}$$

$$y'' - 2y = x \cdot e^{-x^2} \cdot e^{x^2}$$

هنا لتحويل المعادلة المعطاة إلى الشكل:

$$y = e^{-x^2} v(x)$$

للتوضيح:

$$y'' = -2x e^{-x^2} v(x) + e^{-x^2} v''(x)$$

$$y'' = -2x e^{-x^2} v(x) + 4x^2 e^{-x^2} v(x) - 2x e^{-x^2} v'(x)$$

$$- 2x e^{-x^2} v'(x) + e^{-x^2} v''(x)$$

نفرض في المعادلة فنجد أن:



$$e^{x^2} u''(x) - 4x e^{x^2} u'(x) + 4x^2 e^{x^2} u(x) - 2 e^{x^2} u(x) + 4x e^{x^2} u'(x) - 8x^3 e^{x^2} u'(x) + 4x^3 e^{x^2} u(x) = x e^{x^2}$$

بتجميع الحدود

$$e^{x^2} u'' - 2 e^{x^2} u(x) = x e^{x^2}$$

$$u'' - 2u = x \cdot e^{-x^2} e^{x^2}$$

Note

عند  $P(x)$  عندما يكون  
أعداد أعلى منه  
يساوي الواحد

\*\*\*

$$u'' - 2u = x$$

نعود للمعادلة:

$$u = u_h + u_p$$

الحل العام لهذه المعادلة:

لايجاد الحل العام بمعادلة المتجانسة:

$$u'' - 2u = 0 \quad (D^2 - 2)u = 0$$

$$m^2 - 2 = 0$$

المعادلة المميزة لا

$$m_1 = \sqrt{2} \quad m_2 = -\sqrt{2}$$

$$u_h = A_1 e^{\sqrt{2}x} + A_2 e^{-\sqrt{2}x}$$

- إيجاد  $u_p$ 

نبحث على حل من الصورة بالاشتراك المتناهي العكس:

$$\frac{1}{D^2 - 2}$$

$$u_p = \frac{1}{D^2 - 2} x = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} D^2} x$$

$$= -\frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} D^2) x = -\frac{1}{2} x$$

$$\begin{array}{r} 1 - \frac{1}{2} D^2 \overline{) 1 + \frac{1}{2} D^2} \\ \underline{2 + \frac{1}{2} D^2} \\ 2 D^2 \\ \underline{1 + \frac{1}{2} D^2} \end{array}$$

$$u = A_1 e^{\sqrt{2}x} + A_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{x}{2}$$

وبالتالي

الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y = e^{x^2} \left[ A_1 e^{\sqrt{2}x} + A_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{x}{2} \right]$$



مثال (2):

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2 y'' - x(2x+3)y' + (x^2+3x+3)y = (6-x^2)e^x$$

نحوّلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة وذلك من خلال إجراء التغير المناسب مع المتغير التالي:

الحل:

المعادلة المعطاة تكون على الشكل النموذجي

$$y'' - \frac{1}{x}(2x+3)y' + \frac{1}{x^2}(x^2+3x+3)y = \frac{6-x^2}{x^2}e^x$$

$$Q(x) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}$$

$$P(x) = -2 - \frac{3}{x} \quad P'(x) = \frac{3}{x^2}$$

لنسب الاختصار:

$$Q(x) - \frac{1}{4}P^2(x) - \frac{1}{2}P'(x) = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4}\left(4 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x^2}$$

$$= \frac{3}{x^2} - \frac{2}{4} \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^2} = \frac{12-9-6}{4} \frac{1}{x^2}$$

$$= -\frac{3}{4} \frac{1}{x^2} = -\frac{\frac{3}{4}}{x^2}$$

الآن نحصل:

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int P(x) dx} \cdot v(x) \quad v(x) = e^{-\frac{1}{2} \int -2 - \frac{3}{x} dx} \cdot v(x)$$

$$y = e^{\int dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x}} \cdot v(x) = e^{x + \frac{3}{2} \ln x} \cdot v(x) = e^{x + \ln x^{\frac{3}{2}}} \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}} e^x v$$

هنا، لنفرض  $u = v$ ، لنجد الحل العام للمعادلة التفاضلية على الشكل:

$$x^2 v'' + kv' = \left(\frac{6}{x^2} - 1\right) e^x \quad \int P(x) dx$$

$$x^2 v'' - \frac{3}{4} v' = x^2 \left(\frac{6}{x^2} - 1\right) e^x \cdot x^{\frac{3}{2}} e^{-x}$$

أي:



$$x'' - \frac{1}{x} = x^{\frac{1}{2}} \left( \frac{6}{x^{\frac{1}{2}}} - 1 \right)$$

وهي معادلة أويلر من الدرجة الثانية

$$x = e^t$$

$$t = \ln x$$

نلاحظ أن:

$$x'' = D(D-1)u$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\left( D(D-1) - \frac{1}{x} \right) u = e^{t/2} \left( \frac{6}{x^{1/2}} - 1 \right) = \frac{1}{x^{1/2}} (6e^{t/2} - 1)$$

$$6e^{-\frac{1}{2}t} - e^{\frac{1}{2}t}$$

$$\left( D^2 - D - \frac{3}{4} \right) u = 0$$

الحل العام للمعادلة:

$$m^2 - m - \frac{3}{4} = 0$$

المعادلة المميزة:

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)\left(-\frac{3}{4}\right) = 1 + 3 = 4 \quad \sqrt{\Delta} = 2$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 2}{2} = -\frac{1}{2} \quad \frac{1 \pm 3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow u_h = A_1 e^{-\frac{1}{2}t} + A_2 e^{\frac{3}{2}t}$$

الحل الخاص:  $u_p$  لكل الخاص نستخدم الطريقة

بالجزء الثابت

$$\frac{1}{(D + \frac{1}{2})(D - \frac{3}{2})}$$

$$u_p = \frac{1}{(D + \frac{1}{2})(D - \frac{3}{2})} \cdot \left( 6e^{-\frac{1}{2}t} - e^{\frac{1}{2}t} \right)$$

$$\Rightarrow u_p = 6 \cdot \frac{1}{(D - \frac{3}{2})(D + \frac{1}{2})} e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{(D + \frac{1}{2})(D - \frac{3}{2})} e^{\frac{1}{2}t}$$

منه يكون:

$$-6 \cdot \frac{1}{(D - \frac{3}{2})} e^{-\frac{3}{2}t} = 2 e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$\frac{-1}{(D + \frac{1}{2})(D - \frac{3}{2})} e^{\frac{1}{2}t} = + e^{\frac{1}{2}t}$$

$$u_p = 2e^{-\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}$$

$$u = A_1 e^{-\frac{1}{2}t} + A_2 e^{\frac{3}{2}t} + 2e^{-\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t}$$

Date :     /     /



Subject: (7) -----

$$\Rightarrow y = e^x \cdot x^{\frac{3}{2}} \checkmark$$

$$y = e^x \cdot x^{\frac{3}{2}} \left[ (A_1 x^{\frac{1}{2}} + A_2 x^{-\frac{1}{2}}) + 2x^{-\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \right] \quad \text{أشكال}$$

$$y = A_1 x^3 e^x + A_2 x \cdot e^x + 2e^x + x^2 e^x$$

H. Ismail

♦♦

♦♦

♦♦